www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

ÉCOLE SUPÉRIEURE LIBRE DES SCIENCES COMMERCIALES APPLIQUÉES

SESSION DE 1989 MATHÉMATIQUES 1ÈRE ÉPREUVE

(Voie Générale)

DURÉE 4 H - COEFFICIENT 4

PROBLÈME 1 :

Les parties II et III sont indépendantes.

NOTATIONS :

Pour tout entier naturel non nul m, E_m désigne l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à m.
On définit une suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$P_0(X) = 1 \quad , \quad P_1(X) = X \quad , \quad P_n(X) = \frac{X(X-n)^{n-1}}{n!} \text{ pour } n \geqslant 1.$$

Partie I

1°) Vérifier que pour $n \geqslant 1$: $P_n'(X) = P_{n-1}(X-1)$.
En déduire que pour $n > 1$, $P_n'(1) = 0$.

2°) a) Soit n un entier naturel non nul. Démontrer que pour tout entier naturel $k < n$, on a : $P_n^{(k)}(k) = 0$.
($P_n^{(k)}$ désigne la dérivée d'ordre k de P_n ; par convention, $P_n^{(0)} = P_n$).

b) Quelle est la valeur de $P_n^{(n)}(X)$?

Partie II

1°) Montrer que les polynômes $P_0, P_1, \ldots, P_m$ forment une base de E_m.

2°) Pour tout polynôme P de E_m, montrer que les nombres $P^{(k)}(k)$ où k varie de 0 à m, constituent les coordonnées de P dans la base $(P_0, P_1, \ldots, P_m)$.

3°) En déduire que pour tout couple de réels (x, y), on a :

$$P_m(x+y) = \sum_{k=0}^{m} P_k(x)\, P_{m-k}(y).$$

4°) On note u l'endomorphisme de E_m qui, à tout polynôme P de E_m associe le polynôme $Q = u(P)$ défini par :

$$Q(X) = P'(X+1) - P(X)$$

Donner la matrice de u dans la base $(P_0, P_1, \ldots, P_m)$.

Partie III

Soit m un entier naturel non nul et a un nombre réel négatif ou nul.

1°) On considère une application g définie sur l'intervalle $I = [a, m]$, de classe C^m sur I, admettant sur $]a, m[$ une dérivée d'ordre $m + 1$ et telle que $g^k(k) = 0$ pour k variant de 0 à m.
On admet de plus qu'il existe un point $x_0 \neq 0$ appartenant à l'intervalle $[a, 1]$ tel que $g(x_0) = 0$.
Montrer que sous ces conditions, il existe un point $c \in]a, m[$ tel que :

$$g^{(m+1)}(c) = 0.$$

2°) Soit f une fonction définie sur I, de classe C^m et admettant sur $]a, m[$ une dérivée d'ordre $m + 1$.

En posant $g(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{m} f^{(k)}(k)\, P_k(x) - \alpha\, P_{m+1}(x)$, ($\alpha$ étant une constante convenablement choisie), déduire de la question 1°), pour tout x compris entre a et 1, l'existence d'un nombre $\xi \in]a, m[$ tel que :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{m} f^{(k)}(k)\, P_k(x) + P_{m+1}(x)\, f^{(m+1)}(\xi).$$

T.S.V.P

PROBLÈME 2 :

Les parties I et II sont indépendantes.

– Soit r un nombre réel *strictement positif*, on désigne par f_r la fonction numérique définie sur [0, 1] par :

$$\begin{cases} f_r(x) = (1 - x^{1/r})^r \text{ si } x \in]0, 1[\\ f_r(0) = 1 \\ f_r(1) = 0 \end{cases}$$

– On appelle (C_r) la courbe représentative de $y = f_r(x)$ pour $x \in [0, 1]$ dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O ; i, j)$ noté $\mathcal{R}$ (unité 10 cm).

Partie I

1°) a) Étudier les variations de la fonction f_r.

b) Préciser l'étude de la concavité de (C_r) selon la valeur de r.

2°) Montrer que la droite d'équation $y = x$ est axe de symétrie commun à toutes les courbes (C_r).

3°) Construire dans $\mathcal{R}$ les courbes $(C_{1/3})$, $(C_{1/2})$, (C_1), (C_2) et (C_3) en précisant pour chaque courbe les coordonnées du point d'intersection I, de (C_r) et de la droite d'équation $y = x$.

Partie II

Pour tout nombre réel r *strictement positif* on pose :

$$F(r) = r \int_0^1 t^{r-1}(1 - t)^r \, dt$$

lire: $r \int_0^1 t^{r-1}(1-t)^r dt$

1°) Justifier l'existence de $F(r)$.

2°) Montrer que l'aire du domaine limité par (C_r) et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$, a pour valeur $F(r)$.

3°) a) Établir les inégalités suivantes :

$$1/2^r \leqslant F(r) < 1 \quad \text{si} \quad 0 < r \leqslant 1.$$
$$0 < F(r) \leqslant 1/2^r \quad \text{si} \quad r \geqslant 1.$$

b) En déduire $\lim_{r \to 0^+} F(r)$ et $\lim_{r \to +\infty} F(r)$.

4°) Soit n un entier naturel non nul.

a) Calculer $F(n)$ à l'aide d'intégrations par parties.

b) En développant $(1 - t)^n$ par la formule du binôme, en déduire la formule :

$$n \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{C_n^k}{n + k} = \frac{(n!)^2}{(2n)!}$$

5°) On considère l'équation $(4x - x^2)\,\varphi'(x) - (x+2)\,\varphi(x) = x$
où φ est une fonction inconnue à déterminer, φ' désignant sa dérivée.

On recherche une solution particulière sous la forme $\varphi_0(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$; où les coefficients a_n sont des nombres réels.

On admettra que $\varphi_0(x)$ existe si $|x|$ reste inférieur à un certain réel positif R (qu'on ne cherchera pas à déterminer) et que sa dérivée est $\varphi_0'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$, existant sous les mêmes conditions.

a) Établir une relation de récurrence entre a_n et a_{n-1} pour tout n entier naturel non nul.

b) En déduire que pour $n \geqslant 2$ $\quad a_n = F(n)$.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail